

20/05/2019.

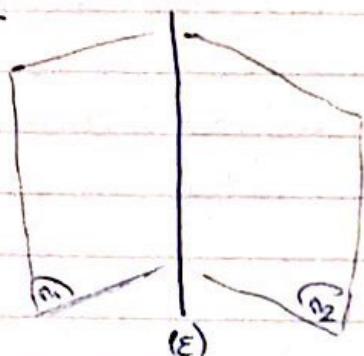
Ασκηση

Να βρεθεί ένα σημείο της ευθείας

$$(ε): \begin{cases} 2x + 3y + z - 5 = 0 \\ 6x + 7y + 8z - 6 = 0 \end{cases}$$

καθώς και ένα διανύσμα μη μηδενικό ταυτοσημείο προς αυτή.

Λύση



Αναζητώ σημείο της (ε) με $z=0$. Έχω το σύστημα με αγνώστους x, y

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x + 7y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5/4 \\ y = 12/4 \end{cases}$$

Άρα ένα σημείο της (ε) είναι το $A(-5/4, 12/4, 0)$

Έτσι διανύσμα ταυτοσημείο και μη μηδενικό προς την ευθεία (ε) είναι το

$\vec{n}_1 = \vec{n}_2$, όπου

$$\vec{n}_1 = (2, 3, 1) \perp (\pi_1)$$

$$\vec{n}_2 \times \vec{n}_1 = (16, -10, -4)$$

$$\vec{n}_2 = (6, 7, 8) \perp (\pi_2)$$

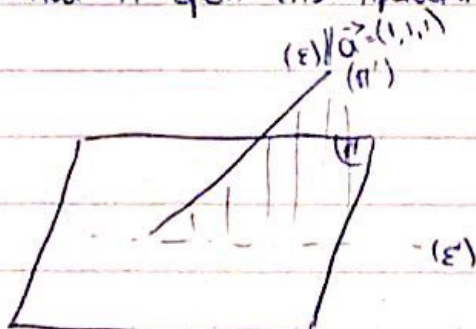
$$(ε): \frac{x + \frac{12}{4}}{2} = \frac{y - \frac{18}{4}}{-5} = \frac{z - 0}{-2}$$

Ασκηση

Να βρεθεί η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(4, 5, 6)$

καθώς και η γωνία της προβολής στο επίπεδο (π) . $8x + 7y - 6z - 5 = 0$

Λύση



Το διάνυσμα $\vec{P_1P_2} = (3, 3, 3)$ είναι παράλληλο προς την ευθεία P_1P_2 .

Αρα οι εξισώσεις της ευθείας είναι: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{3}$

Έστω (ϵ') η προβολή της ευθείας (ϵ) στο (π) . Η (ϵ') είναι η τομή του επιπέδου (π) με το επίπεδο (π') το οποίο περνάει την (ϵ) και είναι κάθετο στο (π) .

$$\vec{u} = (1, 1, 1) \parallel (\epsilon)$$

$$\vec{n} = (8, 4, -6) \perp (\pi)$$

Αρα $\vec{n} \parallel (\pi')$

Συνεπώς $\vec{u} \times \vec{n} \perp (\pi')$

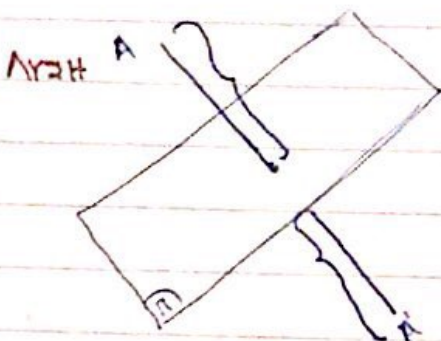
$$\vec{u} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & -6 \end{vmatrix} = (-13, 14, -1)$$

$$(\epsilon'): -13(x-1) + 14(y-2) - 1(z-3) = 0$$

Αρα οι εξισώσεις της προβολής είναι:
$$\begin{cases} 8x + 4y - 6z - 5 = 0 \\ -13(x-1) + 14(y-2) - (z-3) = 0 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $A(-1, 2, 0)$ ως προς το επίπεδο $(\pi): x+y-z+1=0$



$$-1 + 2 - 0 + 1 \neq 0 \rightarrow A \notin (\pi)$$

Έστω A' το ευκλείδειο του A ως προς το επίπεδο (π) . Γιατί η ευθεία $AA' \perp (\pi)$, δηλαδή είναι παραγόμενη προς το $\vec{n} = (1, 2, -1) \perp (\pi)$. Συνεπώς οι εξισώσεις της ευθείας AA' είναι: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-0}{-1}$

Βρίσκω το σημείο B της ευθείας AA' με το επίπεδο (π) :

$$\begin{cases} x = t-1, y = 2t+2, z = -t \\ t-1 + 2(2t+2) - t + 1 = 0 \Rightarrow t = -2/3 \end{cases} \quad B = (-5/3, 2/3, 2/3)$$

Το σημείο B ως μέσο του ευδ. τμήματος AA' στη ευτερογενή

$$\left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+0}{2} \right) = \left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$\Rightarrow x' = \dots$

$y' = \dots$

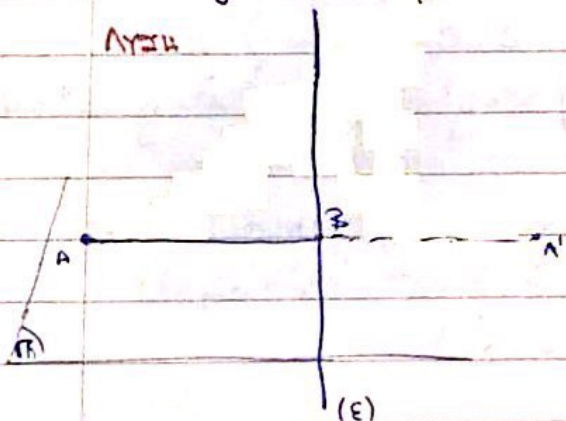
$z' = \dots$

ΔΕΥΤΕΡΗ

Να βρεθεί το ευκλείδειο του σημείου $A(1, 1, 1)$ ως προς την ευθεία
 $(\epsilon): \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-3}{1}$

Συνεπώς βρεθεί την απόσταση του A από την (ϵ) καθώς και την εξίσωση του επιπέδου που ορίζεται από το A και την (ϵ) .

ΛΥΣΗ



$A \in (\epsilon)$

Δεσφω το επίπεδο (π) το οποίο διέρχεται από το A και είναι κάθετο στον (ϵ) .
 Το διάνυσμα $\vec{a} = (3, 8, 1) \parallel (\epsilon)$ είναι κάθετο στο (π) . Άρα η εξίσωση
 του επιπέδου (π) είναι:

$$3(x-1) + 8(y-1) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 8y + z - 12 = 0$$

Βρίσκω το σημείο τομής B του (π) με την (ϵ) λύνοντας το σύστημα

$$\begin{cases} x = 3t+1, y = 8t+1, z = t+3 \\ 3x + 8y + z - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(3t+1) + 8(8t+1) + t+3 - 12 = 0 \\ 3x + 8y + z - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -13/44 \\ 3x + 8y + z - 12 = 0 \end{cases}$$

Άρα $B(x_B, y_B, z_B)$

$x_B = \dots$

$y_B = \dots$

$z_B = \dots$

Το B ως μέσο του AA' είναι:

$$\left(\frac{1+x'}{2}, \frac{1+y'}{2}, \frac{1+z'}{2} \right) = (x_B, y_B, z_B)$$

$$d(A, (\epsilon)) = d(A, B) = \sqrt{\dots}$$

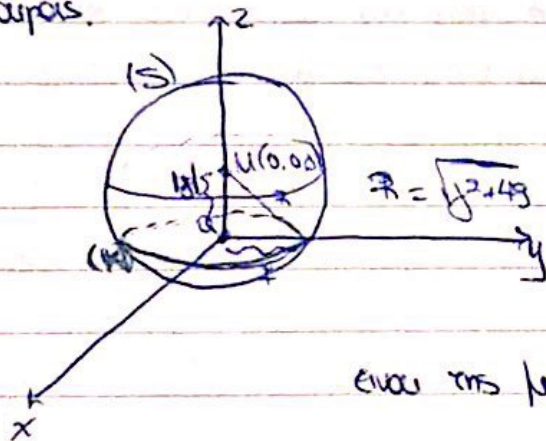
$\vec{AB} \cdot \vec{a}$ είναι κάθετο στο Γνωστό επίπεδο.

Ασκηση.

Μια ομάδα διέρχεται από το σημείο $A(8, 15, 10)$ και τέμνει το επίπεδο

Oxy σε κύκλο κέντρου $O(0, 0, 0)$ και ακτίνας r . Να βρεθεί η εξίσωση
 της ομάδας.

Λύση



Οι εξισώσεις του κύκλου (K) είναι:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 49 \end{cases}$$

Η εξίσωση της Γνωστούς ομάδας
 είναι της μορφής $\lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 49) + \mu z = 0$
 $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$

Επίσης η εφαυρά (S) διέρχεται από το $A(8,15,10)$ γιγνται

$$\lambda(8^2 + 15^2 + 10^2 - 49) + \mu \cdot 10 = 0$$

$$\mu = -\frac{382}{10} \lambda \neq 0$$

$$\lambda(\lambda^2 + y^2 + z^2 - 49) - \frac{382}{10} \lambda z = 0$$

Ασκήζη

Δίνεται η εφαυρά:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 8z - 21 = 0 \text{ και η ευθεία } (ε) \text{ η οποία}$$

$$\lambda_0 x + \lambda_0 y + \lambda_0 z - 2(x + \lambda_0) - 3(y + \lambda_0) + 4(z + \lambda_0) - 21 = 0$$

Διέρχεται από το σημείο $A(2,3,2)$ και είναι $\parallel \vec{OA} = (1,0,-1)$
Να βρεθούν τα σημεία τομής της (ε) με την (S) καθώς και οι εξισώσεις του εφωτοκέντρου επιμέδου της (S) σε αυτά.

Λύση.

$$(ε): \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-2}{-1} = t$$

$$\text{Οι παραμετρικές εξισώσεις της } (ε) \text{ είναι: } \begin{cases} x = t+2 \\ y = 3 \\ z = -t+2 \end{cases}$$

Βρίσκω τα σημεία τομής της (ε) με την (S):

$$(t+2)^2 + 3^2 + (-t+2)^2 - 4(t+2) - 6(3) + 8(-t+2) - 21 = 0$$

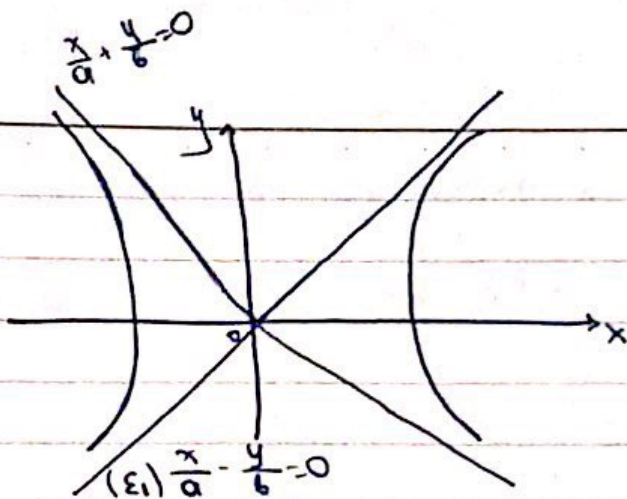
$$= 0 \Rightarrow t = t_1 \text{ ή } t = t_2$$

Ασκήζη

Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής η οποία διέρχεται από το σημείο $A(2,4)$ και έχει ασυμπτωτες ως ευθείες

$$(ε_1): 3x - 2y + 1 = 0$$

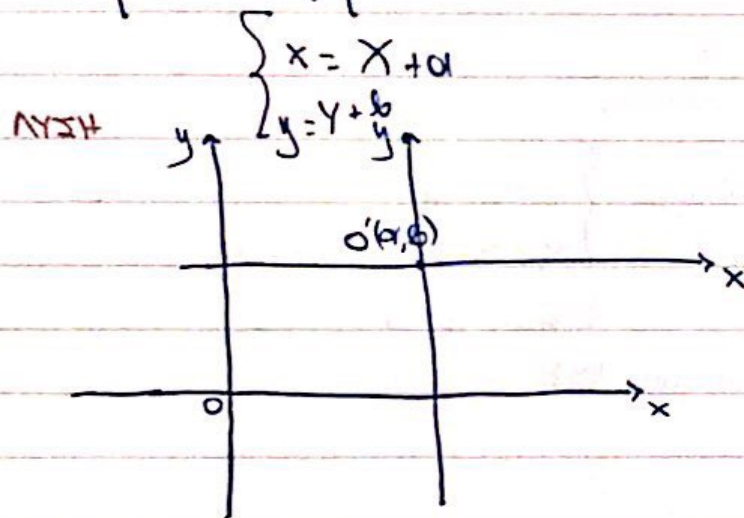
$$(ε_2): 3x + 2y - 7 = 0$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ασυμμετρικά $\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = 0$$



2 το ασυμμετρικά O'XY οι
Εξισώσεις των ασυμμετρικών είναι:

$$\begin{cases} 3X - 2Y + 3a - 2b + 1 = 0 \\ 3X + 2Y + 3a + 2b - 7 = 0 \end{cases}$$

Επιλέγουμε την νέα αρχή O' ώστε $\begin{cases} 3a - 2b + 1 = 0 \\ 3a + 2b - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3X - 2Y = 0 \\ 3X + 2Y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{X}{2} - \frac{Y}{3} = 0 \\ \frac{X}{2} + \frac{Y}{3} = 0 \end{cases}$$

Είναι ασυμμετρικά της υπερβολής

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{ή} \quad \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$